

Смешанные стратегии в операциях.

1.  $i \in M_0 = \{1, 2\}$ ,  $j \in N = \{1, 2\}$ ,  $k = 1$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$   
 $k = 2$  — — —  $\frac{1}{2}$

$$(F(i, j, 1)) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (F(i, j, 2)) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$p = (p_1, p_2)$  — смешанная стратегия оперирующей стороны.  
Противник не знает реализации  $k$  и  $i$ .

Оценка эффективности

$$W(p_1) = \min_{j=1,2} \{p_1 \bar{F}(1, j) + (1-p_1) \bar{F}(2, j)\}, \text{ где}$$

$$(\bar{F}(i, j)) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ — усреднённый критерий.}$$

Наилучший гарантированный результат в смеш. стратегиях

$$F_c = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} W(p_1) \text{ — значение игры с матрицей } (\bar{F}(i, j))$$

$$6p_1 + 3(1-p_1) = 4p_1 + 5(1-p_1) \quad \left\{ \begin{aligned} (F(i, j, 1)) &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, (F(i, j, 2)) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

$2p_1 = 2(1-p_1) \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{2} \quad p^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  оптимальная смешанная стратегия  $v_c = v = \frac{5}{2}$ .

2. Пусть противник знает  $k$ , но реализацию  $i$  не знает. Тогда

$$W(p_1) = \frac{1}{2} \min_{j=1,2} [p_1 F(1, j, 1) + (1-p_1) F(2, j, 1)] + \\ + \frac{1}{2} \min_{j=1,2} [p_1 F(1, j, 2) + (1-p_1) F(2, j, 2)] =$$

$$= \frac{1}{2} \min [3p_1 + 5(1-p_1), 7p_1 + 3(1-p_1)] + \\ + \frac{1}{2} \min [9p_1 + 1(1-p_1), p_1 + 7(1-p_1)] = \frac{1}{2} \min [5 - 2p_1, 3 + 4p_1] + \\ + \frac{1}{2} \min [8p_1 + 1, 7 - 6p_1].$$

$$F_c' = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} W'(p_1) = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} \left\{ \frac{1}{2} \min(5 - 2p_1, 3 + 4p_1) + \frac{1}{2} \min(8p_1 + 1, 7 - 6p_1) \right\}.$$

$W'(p_1)$  - возмущающая кусочно-линейная функция.  
 Она имеет две точки излома  $5 - 2p_1 = 3 + 4p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$ ;  
 $8p_1 + 1 = 7 - 6p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{3}{7}$ .



$$0 \leq p_1 \leq \frac{1}{3} \quad W'(p_1) = \frac{1}{2}(3 + 4p_1 + 8p_1 + 1) = 2 + 6p_1$$

$$\frac{1}{3} \leq p_1 \leq \frac{3}{7} \quad W'(p_1) = \frac{1}{2}(5 - 2p_1 + 8p_1 + 1) = 3 + 3p_1$$

$$\frac{3}{7} \leq p_1 \leq 1 \quad W'(p_1) = \frac{1}{2}(5 - 2p_1 + 7 - 6p_1) = 6 - 4p_1.$$

$$p_1^0 = \frac{3}{7}$$

$$F_c' = 6 - 4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{30}{7}.$$

$$p^0 = \left( \frac{3}{7}, \frac{4}{7} \right).$$

$$3. (F(i, j, z)) = \begin{pmatrix} z & 4 \\ 5 & z \end{pmatrix}$$

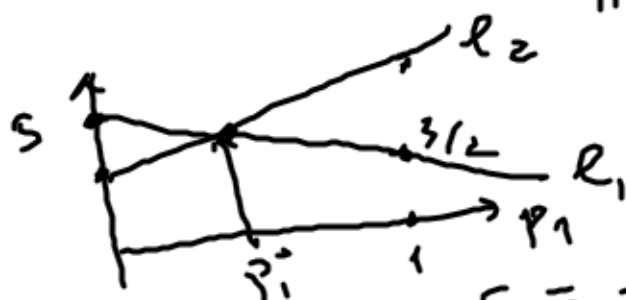
$z \in [0, 3]$  - случайная, равномерно распределённая сл. величина

Противник не знает  $z$  и  $i$ .

$$(\bar{F}(i, j)) = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W(p_1) = \min_{j=1,2} [p_1 \bar{F}(1, j) + (1-p_1) \bar{F}(2, j)] =$$

$$= \min \left[ \frac{3}{2} p_1 + 5(1-p_1), 4p_1 + 3(1-p_1) \right]$$



$$F_c = \frac{2}{9} + \frac{25}{9} = \frac{31}{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} p_1 + 5(1-p_1) &= 4p_1 + 3(1-p_1) \\ 2(1-p_1) &= \frac{5}{2} p_1 \\ p_1^0 &= \frac{2}{2 + \frac{5}{2}} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

4. Пусть противник знает реализацию  $z$ .

Найти оценку эффективности стратегии  $p' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  для произвольной смешанной стратегии  $p = (p_1, 1-p_1)$

$$W(p_1) = \frac{1}{3} \int_0^3 \min_{j=1,2} [p_1 F(1, j, z) + (1-p_1) F(2, j, z)] dz =$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^3 \min [p_1 z + 5(1-p_1), 4p_1 + 2z(1-p_1)] dz$$

$$W(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \int_0^3 \min \left[ \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}, \frac{8}{3} + \frac{2z}{3} \right] dz =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[ \frac{2}{3}z + \frac{5}{3} \right] dz = \frac{9}{9} + \frac{5}{3} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} < \frac{31}{9}.$$

ядра бинарных отношений.

1. Даны векторные оценки для стратегий, оптимальных по Парето  $y^1 = (7, 5, 4)$ ,  $y^2 = (4, 6, 4)$ ,  $y^3 = (5, 6, 3)$ ,  $y^4 = (4, 7, 5)$

а) известно, что все критерии равноценны. Найдите  $C(\langle y^i \rangle, R)$ .

$$C(\langle y^i \rangle, R) = \{y^1, y^4\}. \quad \theta(y^1) = \theta(y^4) = (7, 5, 4).$$

б) известно, что первый критерий важнее второго.

$$\text{Тогда } y^1 T_{12} (5, 7, 4) \not\leq y^2, \quad y^1 T_{12} (5, 7, 4) \not\leq y^3.$$

$$C(\langle y^i \rangle, R) = \{y^1, y^4\}$$

в) известно, что первый критерий важнее второго, а второй равноценен третьему.

$$\text{Тогда } y^1 S_{23} (7, 4, 5) \not\leq y^4 \Rightarrow C(\langle y^i \rangle, R) = \{y^1\}.$$

2. Пусть бинарное отношение  $R$  на множестве  $X = \{1, \dots, n\}$  задано матрицей

$$A = (a_{ij})_{n \times n},$$

$$\text{где } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i R j, \\ 0, & \text{если } i \bar{R} j. \end{cases}$$

Определим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти  $C(X, R)$ .

$$C(X, R) = \{2, 3, 4\}.$$

Смотрим первый столбец, где  $2 R 1, 3 R 1, 4 R 1$ .

$$4 R 1 \bar{R} 4 \Rightarrow 1 \notin C(X, R)$$

Второй столбец  $1 R 2, 4 R 2$ . Здесь  $1 R 2 R 1, 4 R 2 R 4$ .

$$\Rightarrow 2 \in C(X, R)$$

Третий столбец  $1 R 3, 4 R 3$ .  $1 R 3 R 1, 4 R 3 R 4 \Rightarrow 3 \in C(X, R)$

Четвертый столбец  $2 R 4 R 2, 3 R 4 R 3 \Rightarrow 4 \in C(X, R)$

Производная по направлению функции вещественного.

$$F(x_1, x_2, x_3, y) = (x_1 - y)^2 + (x_2 - y)^2 + (x_3 - y)^2 \quad y \in N = [0, 1].$$

производная по направлению  $d = (d_1, d_2, d_3)$

функции  $W(x) = \min_{y \in N} F(x_1, x_2, x_3, y)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

$F$  строго выпукла по  $y$ . Поэтому

$$N(x) = \{y(x)\}, \quad y(x) = \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, & 0 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ 1, & x_1 + x_2 + x_3 > 3, \\ 0, & x_1 + x_2 + x_3 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} = (d, F'_y(x, y(x))) = 2 \sum_{i=1}^3 d_i (x_i - y(x)).$$

Разные задачи. 4)  $x^0 = (3, 2, -1)$   $d = (1, 1, 1)$   
найти  $\frac{dW(x^0)}{d\alpha}$

8). Н/м каких  $x$   $\frac{dW(x)}{d\alpha} = 0$  для всех направлений  $\alpha$ ?

Если  $0 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ , то  $y(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} = 2 \left[ \alpha_1 (x_1 - y(x)) + \alpha_2 (x_2 - y(x)) + \alpha_3 (x_3 - y(x)) \right] = 0$$

для всех  $\alpha$ , если  $x_i - y(x) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Если  $x_1 + x_2 + x_3 > 3$ , то н/м  $\alpha = (1, 1, 1)$

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} > 0$$

Если  $x_1 + x_2 + x_3 < 0$ , то н/м  $\alpha = (1, 1, 1)$

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} < 0.$$